الطرق الطيفية التجميعية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية المعتمدة علي الزمن

يهتم موضوعا التحليل العددي ونظرية التقريب بتقديم الطرق التقريبية لحلول المسائل المصاغة رياضيا مثل المعادلات التفاضلية الجزئية، ولما كان هناك العديد من الظواهر الطبيعية التى يمكن وصفها باستخدام هذه المعادلات أو بأنماطها التكاملية المناظرة، فإننا سوف نهتم في هذه الرسالة وعلى وجه الخصوص بفصول من المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية واللاخطية، وسوف نركز هنا فى الحصول على التقاريب للدوال الصريحة المعرفة بمثل هذه المعادلات.

يعتبر أهم أهدافنا في هذه الرسالة والتى تتكون من ستة فصول، هو تقديم وتطوير خوارزميات جديدة وفعالة للحصول على الحلول التقريبية لانواع مختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الشروط الحدية المعتادة (الشروط الحدية من النوع الأول Dirichlet boundary conditions) والشروط الحدية غير الاعتيادية، وذلك باستخدام الطرق الطيفية التجميعية على أساس التعبير عن الحل الطيفى بالنسبة للمتغير البعدي بدلالة كثيرات حدود جاكوبى. تعتمد هذه الطرق في الأساس على إنشاء قواعد مستقلة من الدوال كتركيبة خطية من كثيرات حدود جاكوبى، ثم تفك دوال الحل بعد ذلك بدلالة هذه القواعد، الأمر الذي يمكننا من تطبيق الطرق الطيفية التجميعية على االمعادلات التفاضلية الجزئية المراد حلها. يؤدي هذا الإنشاء إلى تعيين معاملات مفاكيك الحلول وذلك من خلال أنظمة لاخطية من المعادلات التفاضلية العادية في الزمن، الأمر الذي يمكننا من إيجاد حلها بفاعلية وكفاءة وذلك باستخدام طريقة رونج كوتا من الدرجة الرابعه. كما اننا تمكنا من تطبيق طريقة الطيف التجمعية علي الأنظمة اللاخطية من المعادلات التفاضلية العادية في الزمن بدل من تطبيق طريقة رونج كوتا.

نهدف أيضا في هذه الرسالة لتقديم وبناء خوارزميات فعالة تعتمد علي على أساس التعبير عن الحل الطيفى بالنسبة للمتغيرين الزمني و البعدي بدلالة كثيرات حدود جاكوبى الكسرية، يؤدي هذا الإنشاء إلى تعيين معاملات مفاكيك الحلول وذلك من خلال أنظمة معادلات جبرية غيرخطية.

تمكننا المفكوكات المقترحه للحلول من الحصول على التقريبات المطلوبة لاى قيمة ممكنة للبارامترين $(\alpha > -1\ ,\ \beta > -1)$. قمنا بصفه خاصه بدراسة الحالات الثلاث الخاصه و الهامه و هى استخدام كثيرات حدود تشيبيشف من النوعين الأول $(\alpha = \beta = -1/2)$ و الثانى $(\alpha = \beta = 1/2)$، و كثيرات حدود لاجندار $(\alpha = \beta = 0)$. و كذلك الحالتين الخاصتين بكثيرات حدود تشبيشيف من النوع الثالث

و الرابع $(\alpha = -\beta = \pm 1/2)$. وضحت النتائج النظريه و كذلك العدديه ان الانظمه التى تعتمد على المفكوك بدلالة كثيرة حدود تشبيشيف من النوع الاول $(\alpha = \beta = -1/2)$ ليست هى الافضل عن باقية كثيرات حدود جاكوبى الاخرى.

الفصل الأول

أعطينا في هذا الفصل مقدمة مختصرة عن الطرق الطيفية ومميزاتها على طرق الفروق المحدده وطرق العنصر المنتهي. وضحنا أيضا الفروق بين الطرق الطيفية الثلاث والمستخدمة بصورة شائعة وهي طرق جالركن والطريقة التجميعية وطريقة تاو. قمنا كذلك بإعطاء دراسة مختصرة عن كثيرات الحدود المتعامدة وخصائصها ومفاكيك الدوال بدلالتها. أعطينا كذلك بعض الخصائص العامة لكثيرات حدود جاكوبي. قمنا كذلك بعرض بعض انواع الشروط الحدية.

الفصل الثاني

قدمنا فيه وبالتفصيل خوارزمياتين جديدتين وفعالة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية المكافئه في مجال محدود والمعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية الزائدية في مجال شبه نهائي. حيث استخدمنا طريقة الطيف التجميعية متبوعاً بطريقة رونج كوتا من الدرجة الرابعه لحل المعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية المكافئه في مجال محدود, بينما استخدمنا طريقة الطيف التجميعية والمعتمد علي كثيره حدود جاكوبى الكسرية لتقارب المتغيرين الزمني و البعدي للمعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية الزائدية في مجال شبه نهائي.

الفصل الثالث

ناقشنا في الفصل الثالث كيفية تطبيق الخوارزميات المقترحة في الفصل الثاني والتي تعتمد علي طريقتي الطيف التجميعيه ورونج كوتا لحل انظمة مختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية. حيث اننا طبقنا طريقة الطيف التجميعية معتمدة علي كثيرة الحدود تشيبشيف واستكمال جاوس رادو لحل انظمة من المعادلات التفاضلية الجزئية الزائدية من الرتبة الاولي. كما استخدمنا طريقة الطيف

التجميعية ومعها كثيرات الحدود جاكوبي و استكمال جاوس لوباتو لحل انظمة من المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة او الزائدية من الرتبة الثانية.

الفصل الرابع

وفي الفصل الرابع وباستخدام كثيرات حدود لجندر, قدمنا حلول تقربية للمعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة المتاخرة زمنيا في بعد واحد او بعدين كما تطرقنا لحلول انظمة من ذات المعادلات في بعد واحد وذلك باستخدام طريقة الطيف التجميعية. في حين ان انظمة المعادلات التفاضلية المتاخرة زمنيا تم حلها باستخدام طريقة رونج كوتا المتصله.

الفصل الخامس

يعالج هذا الفصل الدراسة العددية القائمة علي طريقة الطيف التجميعية باستخدام كثيرات حدود جاكوبي وجاكوبي المزاحه متبوعا بطريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة للحصول علي حلول تقربية للمعادلات التفاضلية الجزئية الغير الخطية والتي تعتمد علي شروط غيراعتيادية (الشروط الحدية لنيومان، الشروط الغير اعتيادية علي شكل تكامل، الشروط المختلطة) وقد تم تطبيق هذة الخوارزميات علي بعض المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة غير الخطية وكذلك معادلات الموجة الغير خطية. وتمت مقارنه النتائج مع ابحاث سابقة وتبين لنا الدقة العالية للطريقة محل الدراسة في هذا الفصل.

الفصل السادس

أخيرا وفي الفصل السادس قدمنا طريقة الطيف التجميعية بدلالة كثيرات حدود جاكوبى لحل المعادلات التفاضلة الجزئية المركبة لشرودنجر في بعد واحد وتعتمد علي الشروط الابتدائية والحدية، ونظام المعادلات التفاضلية العادية الناتجة تم حله عدديا باستخدام رونج كوتا من الرتبة الرابعة. واقترحنا كذلك طريقة الطيف التجميعية بدلالة كثيرات حدود جاكوبى المزاحه لحل المعادلات التفاضلة الجزئية المركبة لشرودنجر في بعدين, وتم تطبيق طريقة الطيف التجميعية بدلالة كثيرات حدود جاكوبى المزاحه علي نظام المعادلات التفاضلية العادية الناتج. واخير تمت مقارنه النتائج التي حصلنا عليها من الطريقتين محل الدراسة في هذا الفصل وكانت الثانية اكثر دقة من نظيرتها.

قمنا بتوضيح النتائج التى حصلنا عليها في هذه الرسالة في شكل جداول بيانية ورسومات توضيحية كلما أمكننا ذلك. وضحت هذه النتائج أن الخوارزميات المقترحة لإيجاد الحلول الطيفية التقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية التي قمنا بدراستها دقيقة .

ومما يستوجب الذكر فإن البرامج التى استخدمت في هذه الرسالة نفذت على الحاسب الشخصي من النوع (CPU Intel(R) Core(TM) i3-2350M 2 Duo CPU 2.30 GHz, 6.00 GB of RAM) كما قمنا كذلك باستخدام البرنامج الرمزي الحسابي المعروف باسم (*Mathematica* 8) لعمل العمليات الحسابية الوسطية والجداول الحسابية وكذلك الرسومات التوضيحية في الرسالة ككل.